Zur physikalischen Deutung der Hill-Bedingung

J. Betten

Institut für Werkstoffkunde der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. **31 a**, 639—641 [1976]; eingegangen am 17. April 1976)

About the Physical Interpretation of the Hill-Condition

In this paper it is shown, that the Hill-Condition can be identified with the elastic strain energy of distortion for incompressible materials. The Mises-Potential for anisotropic materials can be identified with the elastic strain energy.

Einleitung

Beim Aufstellen einer Anstrengungshypothese bzw. eines Fließkriteriums kann man von einer für die Werkstoffanstrengung bzw. für das plastische Fließen als maßgeblich angesehenen mechanischen Kenngröße ausgehen, so daß von vornherein die physikalische Deutung gegeben ist. Beispielsweise weisen die Begriffe Normalspannungshypothese, Schubspannungshypothese oder Gestaltänderungsenergiehypothese darauf hin, daß als maßgebliche mechanische (physikalische) Kenngröße (für die Werkstoffanstrengung) die größte Normalspannung, die größte Schubspannung oder die elastische Gestaltänderungsenergiedichte zugrunde gelegt wird. Im Gegensatz dazu lassen sich durch rein mathematische Überlegungen Anstrengungsbedingungen formal oder vom experimentellen Befund ausgehend aufstellen. Jedoch wird man auch dann nach Möglichkeiten einer physikalischen Deutung des Ansatzes suchen.

Mögliche Deutungen von Fließbedingungen werden beispielsweise in [1–3] vorgeschlagen.

Im vorliegenden Aufsatz wird gezeigt, daß eine physikalische Deutung der Hill-Bedingung [4] möglich ist, wenn man von der elastischen Gestaltänderungsenergiedichte ausgeht und das Stoffgesetz des linear-elastischen anisotropen Körpers benutzt.

Elastische Gestaltänderungsenergiedichte

Zur Formulierung der elastischen Gestaltänderungsenergiedichte

$$ {}^{e}A' = \int \sigma'_{ij} \, \mathrm{d}\, {}^{e}\varepsilon'_{ij} \tag{1} $$

(σ'_{ij} Spannungsdeviator, ${}^{e}\varepsilon'_{ij}$ Deviator der elastischen Verzerrungen ${}^{e}\varepsilon_{ij}$) drückt man zunächst das anisotrope Stoffgesetz

$$ \sigma_{ij} = E_{ijkl}\, {}^{e}\varepsilon_{kl} \tag{2} $$

(E_{ijkl} Elastizitätstensor 4. Stufe) durch deviatorische Größen aus:

$$ \sigma'_{ij} = E'_{\{ij\}kl}\, {}^{e}\varepsilon'_{kl} + \tfrac{1}{3} E'_{\{ij\}kk}\, {}^{e}\varepsilon_{ll} \, . \tag{3} $$

Darin ist definiert:

$$ E'_{\{ij\}kl} \underset{\text{def}}{=} E_{ijkl} - \tfrac{1}{3} E_{rrkl}\, \delta_{ij} \, . ^{*} \tag{4} $$

Entsprechend erhält man aus der Inversion

$$ {}^{e}\varepsilon_{ij} = E^{(-1)}_{ijkl}\, \sigma_{kl} \equiv A_{ijkl}\, \sigma_{kl} \tag{5} $$

die Deviatorschreibweise

$$ {}^{e}\varepsilon'_{ij} = A'_{\{ij\}kl}\, \sigma'_{kl} + \tfrac{1}{3} A'_{\{ij\}kk}\, \sigma_{ll} \tag{6} $$

mit

$$ A'_{\{ij\}kl} \underset{\text{def}}{=} A_{ijkl} - \tfrac{1}{3} A_{rrkl}\, \delta_{ij} \, . \tag{7} $$

Der isotrope Sonderfall ist gekennzeichnet durch die isotropen Tensoren

$$ E_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \, , \tag{8 a} $$

$$ A_{ijkl} = \bar{\lambda}\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \bar{\mu}\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \, , \tag{8 b} $$

aus denen über die Rechenvorschriften (4) und (7) die Beziehungen

$$ E'_{\{ij\}kl} = \mu\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk} - \tfrac{2}{3}\, \delta_{ij}\, \delta_{kl}) \tag{9 a} $$

und

$$ A'_{\{ij\}kl} = \frac{\bar{\mu}}{\mu}\, E_{\{ij\}kl} \tag{9 b} $$

folgen. In Gl. (8 a) sind λ und μ die Lameschen Konstanten. Da für die weitere Rechnung λ und $\bar{\lambda}$ ohne Bedeutung sind, sei nur der Zusammenhang zwischen μ und $\bar{\mu}$ angegeben:

$$ \bar{\mu} = 1/4\, \mu \equiv 1/4\, G \tag{10} $$

(G Gleitmodul).

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr.-Ing. J. Betten, Institut für Werkstoffkunde, Technische Hochschule Aachen, *D-5100 Aachen*.

* Diese Schreibweise erinnert an den in i, j antisymmetrischen Teil $E_{[ij]kl}$, der über die Alternierungsvorschrift $E_{[ij]kl} \underset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}\, (E_{ijkl} - E_{jikl})$ gegeben ist (Analogie).

Mit den Beziehungen (9 a, b) und (10) erhält man aus (3) oder auch aus (6) das Hookesche Gesetz in der Form

$$\sigma'_{ij} = 2\,G\,{}^{e}\varepsilon_{ij}\,. \tag{11}$$

Die elastische Gestaltänderungsenergiedichte (1) läßt sich unter Berücksichtigung der Gln. (6) und (7) in der Form

$${}^{e}A' = \tfrac{1}{2}\,A_{ijkl}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl} + \tfrac{1}{3}\int A_{ijkk}\,\sigma'_{ij}\,\mathrm{d}\sigma_{ll} \tag{12}$$

schreiben, die sich für den isotropen Sonderfall wegen (8 b) und (10) vereinfacht zu:

$${}^{e}A' = \sigma'_{ij}\,\sigma'_{ji}/4\,G \equiv J_2'/2\,G \tag{13}$$

(J_2' quadratische Deviatorinvariante).
Ein weiterer wichtiger Sonderfall ist die orthogonale Anisotropie (Orthotropie), die durch neun voneinander unabhängige und von Null verschiedene Anisotropieparameter

$$A_{1111} \neq A_{2222} \neq A_{3333} \neq A_{1212} \neq A_{2323} \neq A_{3131} \neq 0\,, \tag{14 a}$$

$$A_{1122} \neq A_{1133} \neq A_{2233} \neq 0\,, \tag{14 b}$$

im Stoffgesetz (5) gekennzeichnet ist. Damit lautet der Integrand in (12):

$$A_{ijkl}\,\sigma'_{ij} = A_{11kk}\,\sigma'_{11} + A_{22kk}\,\sigma'_{22} + A_{33kk}\,\sigma'_{33}\,, \tag{15}$$

der nur verschwindet, wenn

$$A_{11kk} = A_{22kk} = A_{33kk} = 0 \tag{16}$$

gilt. Diese Bedingungen sind jedoch nur bei Inkompressibilität erfüllt und führen in Verbindung mit der Symmetrieeigenschaft $A_{ijkl} = A_{klij}$ auf die aus der Plastomechanik inkompressibler orthotroper Stoffe bekannten Beziehungen für die Parameter (14 b):

$$\left.\begin{aligned} A_{1122} &= -\tfrac{1}{2}(A_{1111} + A_{2222} - A_{3333})\,,\\ A_{1133} &= -\tfrac{1}{2}(A_{1111} - A_{2222} + A_{3333})\,,\\ A_{2233} &= -\tfrac{1}{2}(-A_{1111} + A_{2222} + A_{3333})\,, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so daß dann nur sechs statt neun Anisotropieparameter voneinander unabhängig wären.

Schließlich sei noch der Sonderfall der transversalen Isotropie (hexagonale Anisotropie) erwähnt mit

$$\left.\begin{aligned} &A_{1111} = A_{2222}\,,\quad A_{2233} = A_{1133}\,,\quad A_{2323} = A_{1313}\,,\\ &A_{1212} = \tfrac{1}{2}(A_{1111} - A_{1122})\,, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

d. h. gegenüber (14 a, b) mit fünf voneinander unabhängigen Koeffizienten. Der Integrand (15) vereinfacht sich damit aufgrund der Symmetrie $A_{ijkl} = A_{klij}$ und der Deviatoreigenschaft $\sigma'_{kk} = 0$ zu

$$A_{ijkk}\,\sigma'_{ij} = (A_{3333} - A_{2222} + A_{1133} - A_{1122})\,\sigma'_{33} \tag{19}$$

und verschwindet wieder, wenn (17) gelten würde. Allgemein kann der Integrand in Gl. (12) auch folgendermaßen umgeformt werden:
Man differenziert Gl. (5):

$$\frac{\partial\,{}^{e}\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{pq}} = A_{ijkl}\,\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\sigma_{pq}} = A_{ijkl}\,\delta_{kp}\,\delta_{lq} = A_{ijpq} \tag{20 a}$$

und erhält nach Umindizierung

$$A_{ijkl} = \partial\,{}^{e}\varepsilon_{ij}/\partial\sigma_{kl}\,. \tag{20 b}$$

Durch Verjüngung ($l = k$) wird weiterhin

$$A_{ijkk} = \partial\,{}^{e}\varepsilon_{ij}/\partial\sigma_{kk} \equiv -\tfrac{1}{3}\,\partial\,{}^{e}\varepsilon_{ij}/\partial p\,^{**}, \tag{21}$$

wenn man mit $p = -\frac{1}{3}\,\sigma_{kk}$ den hydrostatischen Druck bezeichnet. Mithin kann die elastische Gestaltänderungsenergiedichte (12) auch durch

$${}^{e}A' = \tfrac{1}{2}\,A_{ijkl}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{kl} - \tfrac{1}{9}\int \frac{\partial\,{}^{e}\varepsilon_{ij}}{\partial p}\,\sigma'_{ij}\mathrm{d}\sigma_{ll} \tag{22}$$

ausgedrückt werden. Darin verschwindet der Integralterm entweder für einen inkompressiblen elastischen Körper, dessen Verzerrungszustand von einem hydrostatischen Druck nicht beeinflußt wird ($\partial\,{}^{e}\varepsilon_{ij}/\partial p \equiv 0$) oder für den isotropen Körper, bei dem $\partial\,{}^{e}\varepsilon_{ij}/\partial p$ ein Kugeltensor ist und mithin proportional δ_{ij} gesetzt werden kann, so daß der Integrand wegen $\delta_{ij}\,\sigma'_{ij} = 0$ verschwindet. Schließlich läßt sich die Inkompressibilität (16) auch folgendermaßen nachweisen: Man ersetzt in Gl. (6) den Deviator σ'_{kl} durch Tensor und Kugeltensor, so daß sich (6) zu

$${}^{e}\varepsilon'_{ij} = A'_{\{ij\}\,kl}\,\sigma_{kl} \tag{23}$$

vereinfacht. Im Sonderfall der elastischen Inkompressibilität (${}^{e}\varepsilon_{kk} = 0$) stimmt der Tensor ${}^{e}\varepsilon_{ij}$ mit seinem Deviator ${}^{e}\varepsilon'_{ij}$ überein, so daß aus (5) und (23) durch Vergleich die Übereinstimmung

$$A'_{\{ij\}\,kl} \overset{!}{=} A_{ijkl} \tag{24}$$

folgt, was wegen (7) nur für

$$A_{rrkl} = A_{klrr} = 0 \quad \text{bzw.} \quad A_{ijkk} = 0 \tag{25}$$

gilt. Mit der Inkompressibilität (24) bzw. (25) ist neben der allgemeinen Symmetriebedingung $A'_{\{ij\}\,kl} = A'_{kl\,\{ij\}}$, die aus der Definition (7) wegen $A_{ijkl} = A_{klij}$ folgt, noch die Symmetriebedingung

$$A'_{\{ij\}\,kl} \overset{!}{=} A'_{ij\,\{kl\}} \tag{26}$$

** Aufgrund der Symmetrie $A_{kkij} = A_{ijkk}$ erhält man aus (20 b) durch Verjüngung ($i = j$) und anschließender Umindizierung auch: $A_{ijkk} = \partial\,{}^{e}\varepsilon_{kk}/\partial\sigma_{ij}$ mit ${}^{e}\varepsilon_{kk}$ als Volumendehnung.

verbunden, so daß auch durch diese Forderung die Inkompressibilität ausgedrückt werden kann.

Vergleich mit der HILL-Bedingung

Für elastisch inkompressible Stoffe vereinfacht sich die elastische Gestaltänderungsenergiedichte (12) bzw. (22), wie ausführlich dargelegt, zu:

$$^{\mathrm{e}}A' = \tfrac{1}{2} A_{ijkl}\, \sigma'_{ij}\, \sigma'_{kl} \,. \tag{27}$$

Zur Beschreibung des plastischen Fließens anisotroper inkompressibler Stoffe, die sich gegenüber Zug- und Druckbeanspruchung symmetrisch verhalten, wird man zweckmäßigerweise von einem quadratischen plastischen Potential

$$f = \tfrac{1}{2} A_{ijkl}\, \sigma'_{ij}\, \sigma'_{kl} \;{}^{*} \tag{28}$$

ausgehen, das formal identisch ** mit der elastischen Gestaltänderungsenergiedichte (27). Darin liegt die physikalische Bedeutung des Ansatzes (28)!

Mit dem Potential (28) ist die Fließbedingung

$$f = \sigma_{\mathrm{F}}^{*2}/3 \tag{29}$$

(σ_{F}^{*} beliebiger Bezugswert, z. B. die Zugfließgrenze in I-Hauptrichtung: $\sigma_{\mathrm{F}}^{*} = \sigma_{\mathrm{FI}}$) verknüpft, die im isotropen Fall [Gl. (8 b) mit beliebigem $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu} = 1/2$] wegen $f \to J_2'$ und $\sigma_{\mathrm{F}}^{*} \to \sigma_{\mathrm{F}}$ der Mises-Bedingung entspricht.

Darüber hinaus enthält (28) als orthotropen Sonderfall (14 a, b) die sogenannte Hill-Bedingung [4]:

$$F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 2L\,\sigma_{23}^2 + 2M\,\sigma_{31}^2 + 2N\,\sigma_{12}^2 = 1 \tag{30 a}$$

bzw.

$$F(\sigma'_{22}-\sigma'_{33})^2 + G(\sigma'_{33}-\sigma'_{11})^2 + H(\sigma'_{11}-\sigma'_{22})^2 + 2L\,\sigma'^2_{23} + 2M\,\sigma'^2_{31} + 2N\,\sigma'^2_{12} = 1 \,. \tag{30 b}$$

* Über die Fließregel erhält man die Stoffgln. $\mathrm{d}^{\mathrm{p}}\varepsilon_{ij} = A_{\{ij\}kl}\,\sigma'_{kl}\,\mathrm{d}\varkappa$, die im isotropen Fall [Gln. (8 a, b), (9 a, b) mit beliebigen λ, $\bar{\lambda}$ und $\mu = \bar{\mu} = 1/2$] in die Levy-Mises-Gln. übergehen.

** Der Unterschied liegt in den Anisotropieparametern A_{ijkl}, die in (27) und (28) gleich bezeichnet sind, um die formale Identität noch deutlicher zu zeigen.

Durch Koeffizientenvergleich erhält man aus den Gln. (28), (29) und (30 b) einen Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Plastizitätstensors A_{ijkl} in Gl. (28) und den Hill-Koeffizienten in Gl. (30 b) gemäß:

$$A_{1111} = \tfrac{2}{3}(G+H)\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}, \quad A_{2222} = \tfrac{2}{3}(H+F)\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}, \quad A_{3333} = (F+G)\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}, \tag{31 a}$$

$$A_{1122} = -\tfrac{2}{3}H\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}, \quad A_{1133} = -\tfrac{2}{3}G\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}, \quad A_{2233} = -\tfrac{2}{3}F\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}, \tag{31 b}$$

$$A_{1212} = \tfrac{2}{3}N\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}. \quad A_{2323} = \tfrac{2}{3}L\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}, \quad A_{3131} = \tfrac{2}{3}M\,\sigma_{\mathrm{F}}^{*2}. \tag{31 c}$$

Aus den Beziehungen (31 a, b) lies man unmittelbar den Zusammenhang (17) ab, der bei Inkompressibilität (16) besteht.

Darüber hinaus kann die elastische Formänderungsenergiedichte

$$^{\mathrm{e}}W = \int \sigma_{ij}\, \mathrm{d}^{\mathrm{e}}\varepsilon_{ij} \tag{32 a}$$

bzw. mit Gl. (5)

$$^{\mathrm{e}}W = \tfrac{1}{2} A_{ijkl}\, \sigma_{ij}\, \sigma_{kl} \tag{32 b}$$

formal mit dem quadratischen plastischen Potential von Mises [5] identifiziert * werden, das zur analytischen Beschreibung kompressibler anisotroper Stoffe herangezogen werden kann und im orthotropen Fall wie (28) auf die Hill-Bedingung führt, wenn man zusätzlich noch Volumenkonstanz ** fordert.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Hill-Bedingung oder noch allgemeiner das plastische Potential (28) bzw. das Misessche [5] Potential *formal identifiziert* werden kann mit der *elasitschen Gestaltänderungsenergiedichte (27) für inkompressible Stoffe* bzw. mit der *elastischen Formänderungsenergiedichte*.

* Mises benutzt Koordinatenschreibweise.

** Dagegen ist mit Ansatz (28) die Volumenkonstanz a priori erfüllt!

[1] H. Hencky, Z. angew. Math. u. Mech. **5**, 116 [1925].
[2] A. Troost, Naturwiss. **56**, 559 [1969].
[3] A. Troost, J. Betten, Z. Naturforsch. **30 a**, 996 [1975].
[4] R. Hill, Proc. Roy. Soc. **A 193**, 281 [1948]; The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford 1950.
[5] R. V. Mises, Z. angew. Math. Mech. **8**, 161 [1928].